Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Отчет о проделанной лабораторной работе №3

По предмету: Численные методы

На тему: Интерполяция функций. Полиномы Лагранжа, Ньютона.

Выполнила Марина Алина

Группа ПИН-24

03.04.2021

Пусть есть прибор, который в дискретные моменты времени выдаёт сигнал по закону f(t) = sin πt. Допустим, наблюдатель зарегистрировал пять отсчётов в моменты времени ti = i/ 4 , i = 0, 1, 2, 3, 4. Задачей наблюдателя (который не знает закона выдачи сигнала) является получение приближённого значения функции на отрезке [0, 1] в любой момент времени.

Задание

Используя линейную интерполяцию, найдите значения функции в точках: t = 0, 1/ 6 , 1/ 3 , 1 /2 и сравните с реальным значением синуса в этих точках. Постройте графики синуса и ломаной, проходящей через пять заданных точек. Отметьте, насколько сильно они различаются в разных частях графика. Чем это обусловлено?

clc

clear

f=@(t)sin(pi\*t);

i=0:4;

ti=i./4;

fi=f(ti);

ylabel('y')

xlabel('x')

interp\_f=@(x)(interp1(ti,fi,x));

x1=[0, 1/6, 1/3, 1/2];

y=zeros(size(x1));

for i=1:4

y(i)=interp\_f(x1(i));

end

hold on;

fplot(interp\_f, [0 1], 'r');

fplot(@(x)sin(pi\*x),[0 1])

% вывод значений

interp1(ti,fi,x1)

sin(pi\*x1)

Command window

yI =

0 0.4714 0.8047 1.0000

ans =

0 0.5000 0.8660 1.0000

Тогда в нашем случае погрешность интерполяции будет

ans = 0 0.0286 0.0613 0



Задачей интерполяции считают нахождение приближенных значений табличной функции при аргументах x , не совпадающих с узловыми.

При линейной интерполяции табличные значения функции в смежных узловых точках соединяются отрезками прямых, и функция f(x) приближается ломаной с вершинами в данных точках. Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Это наиболее простой и достаточно распространенный способ интерполяции. Если значение x выходит за пределы интервала [ x0;xn], то осуществляется линейная экстраполяция по отрезкам прямых, примыкающим к конечным точкам. При линейной интерполяции интерполирующая функция имеет изломы в узлах интерполяции и разрывы значений производных. Погрешность интерполяции определяется расстояниями между узлами интерполяции

………………………………………………………………………………

Задание

Постройте по заданным пяти точкам интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона и, используя его, найдите значения функции в точках t = 0, 1 /6 , 1/ 3 , 1 /2 , Сравните результаты со значениями, полученными при линейной интерполяции, и значениями синуса в этих точках. Постройте графики синуса и интерполяционного многочлена. Какую максимальную ошибку мы допускаем при аппроксимации синуса данным полиномом? Сравните экспериментальную погрешность с теоретической.

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа и , используя его , найдем значения

clear

clc

f=@(t)sin(pi\*t);

i=0:4;

ti=i./4;

fi=f(ti);

xlabel('x')

ylabel('y')

x1=[0, 1/6, 1/3, 1/2];

y1=zeros(size(x1));

y2=zeros(size(x1));

for i=1:4

x = x1(i);

y2(i)=f(x1(i));

l1 = (x-ti(2))\*(x-ti(3))\*(x-ti(4))/((ti(1)-ti(2))\*(ti(1)-ti(3))\*(ti(1)-ti(4)));

l2 = (x-ti(1))\*(x-ti(3))\*(x-ti(4))/((ti(2)-ti(1))\*(ti(2)-ti(3))\*(ti(2)-ti(4)));

l3 = (x-ti(1))\*(x-ti(2))\*(x-ti(4))/((ti(3)-ti(1))\*(ti(3)-ti(2))\*(ti(3)-ti(4)));

l4 = (x-ti(1))\*(x-ti(2))\*(x-ti(3))/((ti(4)-ti(1))\*(ti(4)-ti(2))\*(ti(4)-ti(3)));

y1(i)= fi(1)\*l1 +fi(2)\*l2 + fi(3)\*l3 + fi(4)\*l4;

end

hold on;

for i = 1:3

line([x1(i);x1(i+1)],[y1(i);y1(i+1)],'Color','blue');

line([1/2+x1(i);1/2+x1(i+1)],[y1(5-i);y1(5-i-1)],'Color','blue');

end

fplot(f, [0 1], 'r');

y2

y1

Command window

Значения функции y=sin(pi\*t)в искомых точках

y2 =

0 0.5000 0.8660 1.0000

Значения интерполированной функции с помощью метода Лагранжа:

y1 =

0 0.5090 0.8592 1.0000

Сравним со значениями, полученными при линейной интерполяции

( полученными в предыдущем задании)

yI =

0 0.4714 0.8047 1.0000

Заметим , что при построении функции с помощью полинома Лагранжа погрешность интерполяции будет меньше , что говорит о том , что данный метод лучше «сглаживает шум»



………………………………………………………………………………..

Задание

В программе сделать возможность строить многочлен Лагранжа или Ньютона для произвольного набора точек t = t0, t1, . . . , tn.

clear

clc

function Z=Lagrange(a)

syms x;

t=[0,pi/4,pi/2,3\*pi/4,pi];

f=[0,sqrt(2)/2,1,sqrt(2)/2,0];

L=0;

for i=1:5

t1=t;

t1(i)=[];

L=L+f(i)\*prod(x-t1)/prod(t(i)-t1);

end

disp('Многочлен Лагранжа')

pretty(L)

disp('Значение многочлена Лагранжа в заданной точке: ')

Z=subs(L,a);

disp(Z)

end

………………………………………………………………………………………

Задание

Найдите значение интерполяционного полинома при t = 2. Почему оно так сильно отличается от значения синуса в этой точке?

Воспользуемся функцией , написанной в предыдущем задании

Command window

Значение многочлена Лагранжа в заданной точке:

(2251799813685248\*2^(1/2)\*(pi/2 - 2)\*(pi/4 - 2)\*(pi - 2))/5140916555662875 - (2251799813685248\*(pi/4 - 2)\*((3\*pi)/4 - 2)\*(pi - 2))/1713638851887625 + (2251799813685248\*2^(1/2)\*(pi/2 - 2)\*((3\*pi)/4 - 2)\*(pi - 2))/5140916555662875

ans =

0.9095

А значение sin(2\*pi)= -2.4493e-16

Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции f(x), а также от расположения узлов интерполяции и точки x. В нашем случае значение интерполяционного полинома так сильно отличается от значения синуса в этой точке из-за расположения узлов интерполяции и точки х.

…………………………………………………………………………………….

Задание

Задайте функцию Рунге на отрезке [−5, 5] в десяти равноотстоящих точках. Сравните значения функции и интерполяционного полинома при x = 4, 5. Постройте графики функции и полинома на заданном отрезке и объясните поведение интерполяционного полинома. Посмотрите, что будет происходить при постепенном увеличении числа узлов интерполяции и подумайте, как можно избавиться от получившегося эффекта.

clear

clc

syms z

axis equal

x = -5:0.1:5;

f=1/(1+25\*z^2);

y = 1./(1+25\*x.^2) ;

xi = 4.5;

yi = newton(x,y,xi);

plot(x,y,'o','linewidth',2);

hold on;

plot(xi,yi,'or','linewidth',3);

hold on;

xi=x(1):0.01:x(length(x));

yi = newton(x,y,xi);

plot(xi,yi,'k-');

grid on;

xlabel('x');

ylabel('y');

ezplot('1/(1+25\*x^2)',[-10 10]);

function yy = newton(x, y, xx)

n = length(x);

diff = y;

for k = 1 : n-1

for i = 1: n - k

diff(i) = (diff(i+1) - diff(i)) / (x(i+k) - x(i));

end

end

yy = diff(1) \* ones(size(xx));

for k = 2 : n

yy = diff(k) + (xx - x(k)) .\* yy;

end

end

Command window



Где красным цветом нарисован график функции Рунге, а синим цветом интерполяционный многочлен

Постепенно увеличивая количество узлов , получим следующие графики

N=20



N=100



увидим , что при увеличении количества узлов

Величина (n+1)-й производной функции Рунге увеличивается с увеличением n. Следствием этого является то , что верхняя граница стремится к бесконечности, когда n стремится к бесконечности. Можно было бы воспользоваться кусочно-полиномиальной интерполяцией

……………………………………………………………………………………..

Задание

Для приближения функции Рунге используйте Чебышёвские узлы. Постройте графики функции и многочлена.

clear

clc

syms z

axis equal

f=1/(1+25\*z^2);

a=-5;b=5;n=10;

for k=1:1:n

x(k)=1/2\*(a+b)+1/2\*(b-a)\*cos((2\*k-1)\*pi/(2\*n));

end

y = 1./(1+25\*x.^2) ;

xi = 4.5;

yi = newton(x,y,xi);

plot(x,y,'r');

hold on;

xi=x(1):0.01:x(length(x));

yi = newton(x,y,xi);

plot(xi,yi,'y-');

grid on;

xlabel('x');

ylabel('y');

ezplot('1/(1+25\*x^2)',[-10 10]);

function yy = newton(x, y, xx)

n = length(x);

diff = y;

for k = 1 : n-1

for i = 1: n - k

diff(i) = (diff(i+1) - diff(i)) / (x(i+k) - x(i));

end

end

yy = diff(1) \* ones(size(xx));

for k = 2 : n

yy = diff(k) + (xx - x(k)) .\* yy;

end

end

